

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.В. Калинин

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ
МАРКОВСКИХ СИСТЕМ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*Методические указания
к выполнению типового расчета*

Москва
Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана
2016

УДК 519.21+531.19

ББК 22.171

K172

Рецензент *А.Н. Канатников*

А.В. Калинин

K172 Статистическое моделирование дискретных марковских систем с взаимодействием: Методические указания к выполнению типового расчета. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 32 с: ил.

Представлены необходимые теоретические сведения и методические указания по применению метода статистических испытаний при моделировании стохастических систем с взаимодействием при дискретном фазовом пространстве. Приведены соответствующие примеры, даны условия задач типового расчета.

Для студентов факультетов ФН, РК.

Ил. 11. Библиогр. 35 назв.

УДК 519.21+531.19

ББК 22.171

Методическое издание

Александр Вячеславович Калинин

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ
МАРКОВСКИХ СИСТЕМ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**

Редактор

Корректор

Компьютерная верстка *В.А. Товстоног*

Подписано в печать . . . Формат 60×84/16. Бумага офсетная.

Печ. л. , . Усл. печ. л. , . Уч.-изд. л. , .

Тираж 50 экз. Изд. № . Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.

105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

В методических указаниях даны примеры применения метода статистических испытаний для исследования класса дискретных стохастических моделей — задаваемых кинетическими схемами взаимодействий. Теоретической основой метода являются определение марковских процессов со счетным множеством состояний и дифференциальные уравнения Колмогорова для переходных вероятностей таких процессов. В случае процессов рождения и гибели нелинейных типов для их исследования возможно применить только численные методы — итерационный алгоритм моделирования на ЭВМ случайных процессов. Используются программные пакеты Matlab, Maple, Mathematica с визуализацией данных.

Даны условия 30 задач типового расчета по курсу марковских моделей для студентов специальности «Прикладная математика».

1. Кинетические схемы и дискретные марковские модели

1.1. Детерминированный и стохастический подходы при моделировании схем взаимодействий. В различных областях естествознания и техники дискретные системы с взаимодействиями и превращениями составляющих их элементов задаются кинетическими схемами. В семестровом курсе «Дополнительные главы теории случайных процессов» [10] излагаются основы аналитического метода для марковских процессов с дискретными состояниями. Рассматриваются одномерные и многомерные процессы рождения и гибели линейного типа, соответствующие схемам превращений (см. [3, 20, 23] и др.): $T_1 \rightarrow T_2$ (ординарная); $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_n$ (последовательная); $T_1 \rightarrow T_2, T_3$ (параллельная); $T_1 \rightarrow T_2; T_2 \rightarrow T_3, T_4$ (последовательно-параллельная); $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_n \rightarrow T_1$ (простая циклическая); $T \rightarrow 2T$ (автокатализ); $T \rightarrow kT, k = 0, 1, 2, \dots$ (цепная с ветвлением); $0 \rightarrow T; T \rightarrow 0$ (система массового обслуживания $M/M/\infty$) и другие.

Во втором семестровом курсе «Марковские модели систем с взаимодействием» [13] рассматриваются процессы рождения и гибели квадратичного типа, соответствующие схемам с парными взаимодействиями: $2T \rightarrow T$

(бинарная); $T_1 + T_2 \rightarrow T_3$ (бинарная); $T_1 + T_2 \rightarrow T_4$; $T_1 + T_3 \rightarrow T_5$ (параллельная); $T_1 + T_2 \rightarrow T_3$; $T_3 \rightarrow T_1 + T_2$ (двусторонняя); $T_1 + T_2 \rightarrow T_2 + T_3$ (катализ) и другие.

В общем случае системы с превращениями и взаимодействиями составляющих их элементов типов T_1, \dots, T_n , задаются кинетическими схемами [23, 6, 10]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1^1 T_1 + \varepsilon_2^1 T_2 + \dots + \varepsilon_n^1 T_n \rightarrow \gamma_1^1 T_1 + \gamma_2^1 T_2 + \dots + \gamma_n^1 T_n; \\ \dots \\ \varepsilon_1^i T_1 + \varepsilon_2^i T_2 + \dots + \varepsilon_n^i T_n \rightarrow \gamma_1^i T_1 + \gamma_2^i T_2 + \dots + \gamma_n^i T_n; \\ \dots \\ \varepsilon_1^l T_1 + \varepsilon_2^l T_2 + \dots + \varepsilon_n^l T_n \rightarrow \gamma_1^l T_1 + \gamma_2^l T_2 + \dots + \gamma_n^l T_n, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\varepsilon_j^i, \gamma_j^i$, $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, n$ — целые неотрицательные числа. Схемой (1) может быть учтено поступление элементов извне (открытая система) и образование конечных элементов (финального продукта).

Детерминированный подход к моделированию кинетической схемы (1) состоит в следующем. Вводят количество $x_i(t)$ элементов типа T_i , $i = 1, \dots, n$, в момент времени t , $t \in [0, \infty)$. Функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ удовлетворяют системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, или кинетических уравнений [23],

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n); \\ \dots \\ \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n); \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{array} \right. \quad (2)$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0, \dots, x_n(0) = x_n^0$. Вид функций f_1, \dots, f_n определяется схемой (1) по законам формальной кинетики [23]: для ординарной схемы превращений $T_1 \rightarrow T_2$ полагают $\dot{x}_1 = -\lambda x_1$; $\dot{x}_2 = \lambda x_1$; для бинарной схемы взаимодействий $T_1 + T_2 \rightarrow T_3$ полагают $\dot{x}_1 = -\lambda x_1 x_2$; $\dot{x}_2 = -\lambda x_1 x_2$; $\dot{x}_3 = \lambda x_1 x_2$ (закон действующих масс), где $\lambda > 0$ — кон-

станта. В прикладных задачах функции f_1, \dots, f_n являются многочленами степени не выше третьей.

Стохастический подход основан на вероятностной модели [10, 25] для схемы взаимодействий (1) в виде однородного во времени многомерного марковского процесса $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$, $t \in [0, \infty)$, на дискретном фазовом пространстве

$$N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, n\}.$$

Состояние $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ соответствует наличию α_1 элементов типа T_1, \dots, α_n элементов типа T_n , и строке $\varepsilon_1^i T_1 + \dots + \varepsilon_n^i T_n \rightarrow \gamma_1^i T_1 + \dots + \gamma_n^i T_n$ соответствует скачок случайного процесса из состояния $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в состояние $(\alpha_1 - \varepsilon_1^i + \gamma_1^i, \dots, \alpha_n - \varepsilon_n^i + \gamma_n^i)$. В состоянии $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ процесс находится случайное время τ_α с показательным распределением, зависящим от параметров таким образом, что стохастическая модель и детерминированная модель (2) связаны «термодинамическим предельным переходом» [15, 19].

1.2. Марковские процессы с дискретными состояниями. Уравнения Колмогорова. Далее для $\alpha, \beta, \gamma \in N^n$ приняты следующие обозначения: $\gamma = \alpha - \beta$, если $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1, \dots, \gamma_n = \alpha_n - \beta_n$; $\alpha \geq \beta$, если $\alpha_1 \geq \beta_1, \dots, \alpha_n \geq \beta_n$, и так далее. Для однородного во времени марковского процесса $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний N^n , обозначим переходные вероятности

$$P_{\alpha\beta}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = \beta \mid \xi(0) = \alpha\}, \quad \alpha, \beta \in N^n.$$

Такой случайный процесс задается плотностями переходных вероятностей $a_{\alpha\beta} = (dP_{\alpha\beta}(t)/dt)|_{t=0+}$. Далее всегда считаем, что выполнены условия [7, 5], при которых переходные вероятности удовлетворяют первой (обратной) и второй (прямой) системам дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma \in N^n} a_{\alpha\gamma} P_{\gamma\beta}(t), \quad \alpha \in N^n; \quad \frac{dP_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_{\gamma \in N^n} P_{\alpha\gamma}(t) a_{\gamma\beta}, \quad \beta \in N^n,$$

начальные условия $P_{\alpha\alpha}(0) = 1, P_{\alpha\beta}(0) = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Состояние α называют поглощающим, если $a_{\alpha\alpha} = 0$.

Марковский процесс называется процессом рождения и гибели, если из состояния $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ процесс может совершить скачок только в состояние $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ такое, что $|\alpha_i - \gamma_i| \leq 1$ для всех $i = 1, \dots, n$ [6, 7]. Если «вложенная цепь Маркова» [7] для процесса является случайным блужданием на N^n , то определяют типы процессов рождения и гибели: линейный, квадратичный, кубический и так далее, в зависимости от вида функции $a_{\alpha\alpha} = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Из множества марковских процессов на фазовом пространстве N^n выделяют специальный класс процессов B_2 — указанием конкретного вида плотностей переходных вероятностей $\{a_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in N^n\}$ [10].

1.3. Марковская модель кинетической схемы. Первое и второе уравнения в производящих функциях. Из схемы взаимодействий (1) имеем векторы $\varepsilon^i = (\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_n^i) \in N^n$, $i = 1, \dots, l$. Каждому вектору ε^i сопоставим распределение вероятностей на N^n , $\{p_\gamma^i \geq 0, \sum_{\gamma \in N^n} p_\gamma^i = 1, p_{\varepsilon^i}^i = 0\}$, и набор чисел $\{\varphi_\alpha^i \geq 0, \alpha \in N^n; \varphi_\alpha^i = 0, \text{ если при некотором } k \alpha_k < \varepsilon_k^i\}$ по следующей формуле,

$$\varphi_\alpha^i = \lambda_i \prod_{j=1}^n \alpha_j (\alpha_j - 1) \dots (\alpha_j - \varepsilon_j^i + 1), \quad \alpha \in N^n, \quad (3)$$

где $\lambda_i > 0$ — коэффициенты пропорциональности, $i = 1, \dots, l$. Для марковского процесса $\xi(t)$ класса B_2 по определению полагаем [10]

$$a_{\alpha\alpha} = - \sum_{i=1}^l \varphi_\alpha^i, \quad a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^l \varphi_\alpha^i p_{\beta - \alpha + \varepsilon^i}^i, \quad \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in N^n.$$

Процесс $\xi(t)$ интерпретируется как стохастическая модель системы взаимодействующих частиц n типов T_1, \dots, T_n . Событие $\{\xi(t) = \alpha\}$ есть такое состояние системы, в котором в момент времени t имеется совокупность S_α частиц, состоящая из α_1 частиц типа T_1, \dots, α_n частиц типа T_n : $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_n T_n$. Зададим l комплексов взаимодействия частиц S_{ε^i} , соответствующих векторам ε^i . Через случайное время τ_α^i , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^i \leq t\} = 1 - e^{-\varphi_\alpha^i t}$, происходит взаимодействие комплекса частиц S_{ε^i} . В этот момент из α_1 частиц типа T_1 выбирается ε_1^i частиц, \dots , из α_n частиц типа T_n выбирается ε_n^i частиц, и этот комплекс частиц S_{ε^i} с распределением вероятностей $\{p_\gamma^i\}$

заменяется совокупностью S_γ новых частиц. Система из состояния S_α , соответствующего вектору α , переходит в состояние $S_{\alpha-\varepsilon^i+\gamma}$, соответствующее вектору $\alpha - \varepsilon^i + \gamma$, далее происходит аналогичная эволюция системы частиц.

В состоянии S_α система находится случайное время τ_α , пока не произойдет какое-либо из l взаимодействий, то есть $\tau_\alpha = \min(\tau_\alpha^1, \dots, \tau_\alpha^l)$. Здесь предполагается, что случайные величины $\tau_\alpha^1, \dots, \tau_\alpha^l$ независимы. Тогда $\mathbf{P}\{\tau_\alpha \leq t\} = 1 - e^{-(\varphi_\alpha^1 + \dots + \varphi_\alpha^l)t}$ и вероятность, что произошло взаимодействие комплекса частиц S_{ε^i} , при условии, что взаимодействие произошло, равна $\varphi_\alpha^i (\sum_{i=1}^l \varphi_\alpha^i)^{-1}$. Возможные превращения частиц в такой системе представляют собой схему взаимодействий (1), где случайный вектор $\gamma^i = (\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)$ имеет распределение $\{p_\gamma^i\}$, $i = 1, \dots, l$.

Выбор значений (3) для φ_α^i объясняется следующим образом. Пусть марковский процесс находится в состоянии $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, что соответствует наличию совокупности частиц $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_n T_n$. Предполагаем, что за время Δt , $\Delta t \rightarrow 0$, вероятность $\varphi_\alpha^i \Delta t + o(\Delta t)$ взаимодействия комплекса частиц S_{ε^i} пропорциональна числу $C_{\alpha_1}^{\varepsilon_1^i}$ сочетаний ε_1^i частиц типа T_1 из имеющихся α_1 частиц типа T_1 , \dots , пропорциональна числу $C_{\alpha_n}^{\varepsilon_n^i}$ сочетаний ε_n^i частиц типа T_n из имеющихся α_n частиц типа T_n .

Для марковских процессов класса B_2 уравнения Колмогорова для переходных вероятностей записываются в компактном виде, используя производящие функции. Многомерной производящей функцией $F_\xi(s_1, \dots, s_n)$, соответствующей целочисленному случайному вектору $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ с распределением вероятностей $\{p_\alpha \geq 0, \alpha \in N^n, \sum_{\alpha \in N^n} p_\alpha = 1\}$, называется сумма ряда [7, 20]

$$F_\xi(s_1, \dots, s_n) = \mathbf{M} s_1^{\xi_1} \dots s_n^{\xi_n} = \sum_{\alpha \in N^n} p_\alpha s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}.$$

Далее будем применять запись $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Для вектора будем употреблять обозначение 1, если все его компоненты равны единице; $|s|$ обозначим вектор с компонентами $|s_i|$.

Математические ожидания компонент случайного вектора вычисляются по формуле [20]

$$\mathbf{M} \xi_i = \frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где производную в точке $s = 1$ понимается как производная слева по всем координатам s_i , $i = 1, \dots, n$. Выражение для дисперсии имеет вид

$$\mathbf{D}\xi_i = \frac{\partial^2 F_\xi(1)}{\partial s_i^2} + \frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i} - \left(\frac{\partial F_\xi(1)}{\partial s_i} \right)^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для свертки первой системы дифференциальных уравнений Колмогорова вводятся экспоненциальные производящие функции для переходных вероятностей ($z = (z_1, \dots, z_n)$)

$$G_\beta(t; z) = \sum_{\alpha \in N^n} \frac{z^\alpha}{\alpha!} P_{\alpha\beta}(t)$$

и линейные дифференциальные операторы

$$h_i \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{\gamma \in N^n} p_\gamma^i \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}, \quad i = 1, \dots, l; \quad \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma} = \frac{\partial^{\gamma_1 + \dots + \gamma_n}}{\partial z_1^{\gamma_1} \dots \partial z_n^{\gamma_n}}.$$

Т е о р е м а 1 [10]. Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $G_\beta(t; z)$ марковского процесса $\xi(t)$ класса B_2 при любом $\beta \in N^n$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных ($\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$)

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \lambda_i z^{\varepsilon^i} \left(h_i \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial z^{\varepsilon^i}} \right) G_\beta(t; z), \quad G_\beta(0; z) = \frac{z^\beta}{\beta!}.$$

Для свертки второй системы дифференциальных уравнений Колмогорова используют производящие функции ($|s| \leq 1$)

$$F_\alpha(t; s) = \mathbf{M}(s^{\xi(t)} \mid \xi(0) = \alpha) = \sum_{\beta \in N^n} P_{\alpha\beta}(t) s^\beta, \quad h_i(s) = \sum_{\gamma \in N^n} p_\gamma^i s^\gamma.$$

Т е о р е м а 2 [10]. Производящая функция переходных вероятностей $F_\alpha(t; s)$ марковского процесса $\xi(t)$ класса B_2 при любом $\alpha \in N^n$ удовлетворяет при $|s| \leq 1$ линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^l \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon^i}) \frac{\partial^{\varepsilon^i} F_\alpha(t; s)}{\partial s^{\varepsilon^i}}, \quad F_\alpha(0; s) = s^\alpha.$$

Функции $G_\beta(t; z)$, $F_\alpha(t; s)$ и $h_i(s)$ являются аналитическими в рассматриваемых областях.

2. Двухвершинное стационарное распределение в бистабильной системе $3\mathbf{T} \rightarrow 2\mathbf{T}; 2\mathbf{T} \rightarrow 3\mathbf{T}; \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{0}; \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{T}$

Рассматривается однородный во времени марковский процесс рождения и гибели $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$ которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде ($\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$)

$$P_{i,i-1}(t) = (\lambda_1 i + \lambda_3 i(i-1)(i-2))t + o(t), P_{i,i+1}(t) = (\lambda_0 + \lambda_2 i(i-1))t + o(t),$$

$$P_{ii}(t) = 1 - (\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 i(i-1) + \lambda_3 i(i-1)(i-2))t + o(t), P_{ij}(t) = o(t),$$

$j \neq i-1, i, i+1$. Первую систему дифференциальных уравнений для переходных вероятностей при помощи экспоненциальной производящей функции $G_j(t; z) = \sum_{i=0}^{\infty} (z^i / i!) P_{ij}(t)$, запишем в виде линейного уравнения

$$\frac{\partial G_j(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda_3 z^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) + \lambda_2 z^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \lambda_1 z \left(1 - \frac{\partial}{\partial z} \right) + \lambda_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 \right) \right] G_j(t; z), \quad G_j(0, z) = \frac{z^j}{j!}.$$

Вторую систему дифференциальных уравнений для переходных вероятностей при помощи производящей функции $F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j$, $|s| \leq 1$, запишем в виде линейного уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \lambda_3 (s^2 - s^3) \frac{\partial^3 F_i(t; s)}{\partial s^3} + \lambda_2 (s^3 - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_1 (1 - s) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} + \lambda_0 (s - 1) F_i(t; s), \quad F_i(0; s) = s^i. \quad (4)$$

В состоянии i процесс находится случайное время τ_i , $\mathbf{P}\{\tau_i < t\} = 1 - e^{-(\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 i(i-1) + \lambda_3 i(i-1)(i-2))t}$. Затем происходит переход процесса $i \rightarrow i-1$ с вероятностью

$$\frac{\lambda_1 i + \lambda_3 i(i-1)(i-2)}{\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 i(i-1) + \lambda_3 i(i-1)(i-2)},$$

или переход $i \rightarrow i+1$ с вероятностью

$$\frac{\lambda_0 + \lambda_2 i(i-1)}{\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 i(i-1) + \lambda_3 i(i-1)(i-2)}.$$

Далее аналогичная эволюция процесса. Рассматриваемый марковский процесс является процессом рождения и гибели кубического типа.

Марковская модель $\xi(t)$ иллюстрирует роль стохастических флуктуаций при рассмотрении химической реакции с кинетической схемой $A + 2T \rightleftharpoons 3T$; $T \rightleftharpoons B$ [6], причем концентрации веществ A и B поддерживаются постоянными. Предполагается, что система является однородной в пространстве, что достигается, например, перемешиванием. Коэффициент λ_2 пропорционален концентрации вещества A и коэффициент λ_0 пропорционален концентрации вещества B .

2.1. Детерминированная модель и ее исследование. Дифференцируем уравнение (4) по s ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial t \partial s} = & \lambda_3(2s - 3s^2) \frac{\partial^3 F_i(t; s)}{\partial s^3} + \lambda_3(s^2 - s^3) \frac{\partial^4 F_i(t; s)}{\partial s^4} + \\ & + \lambda_2(3s^2 - 2s) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_2(s^3 - s^2) \frac{\partial^3 F_i(t; s)}{\partial s^3} - \\ & - \lambda_1 \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} + \lambda_1(1 - s) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_0 F_i(t; s) + \lambda_0(s - 1) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вводя обозначение для среднего $A_i(t) = \mathbf{M}(\xi(t) | \xi(0) = i) = (\partial F_i(t; s) / \partial s) |_{s=1}$, и учитывая $F_i(t; 1) \equiv 1$, получаем при $s = 1$ из (5) равенство

$$\frac{dA_i(t)}{dt} = -\lambda_3 \left. \frac{\partial^3 F_i(t; s)}{\partial s^3} \right|_{s=1} + \lambda_2 \left. \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} \right|_{s=1} - \lambda_1 A_i(t) + \lambda_0. \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения закона действующих масс соблюдаются как приближенные для среднего $A_i(t)$ при большом начальном числе частиц; полагают $i \rightarrow \infty$ (предельный переход соответствует принятому в статистической физике «термодинамическому предельному переходу» [15, 19]) и

$$\left. \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} \right|_{s=1} \approx \left(\left. \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} \right|_{s=1} \right)^2, \quad \left. \frac{\partial^3 F_i(t; s)}{\partial s^3} \right|_{s=1} \approx \left(\left. \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} \right|_{s=1} \right)^3.$$

Тогда из (6) следует уравнение детерминированной модели

$$\dot{x} = -\lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 - \lambda_1 x + \lambda_0, \quad (7)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$; здесь $x(t)$ — количество реагента в момент времени t .

Поскольку $-\lambda_3 < 0$, то при $t \rightarrow \infty$ в системе устанавливается равновесие. Если три корня стационарного уравнения

$$-\lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 - \lambda_1 x + \lambda_0 = 0 \quad (8)$$

действительные и различные, то имеется три точки локального равновесия. При этом меньший и больший корень являются точками устойчивого равновесия, а корень между ними точкой неустойчивого равновесия.

На рис. 1 показаны решения уравнения детерминированной модели (7) при различных начальных условиях. Горизонтальные линии соответствуют точкам локального равновесия. В зависимости от начального условия, $x(t)$ стремится к одному из двух устойчивых положений: если начальное положение ниже положения неустойчивого равновесия, то при $t \rightarrow \infty$ решение $x(t)$ стремится к значению меньшего корня; в противном случае — к значению большего корня x_c . Численное моделирование марковского процесса $\xi(t)$ показывает, что случайный процесс большую часть времени проводит вблизи точек устойчивого равновесия соответствующей детерминированной модели (см. рис. 1, 2), переходя от одной точки к другой (бистабильная система [6], гл. 7, § 1; [14]).

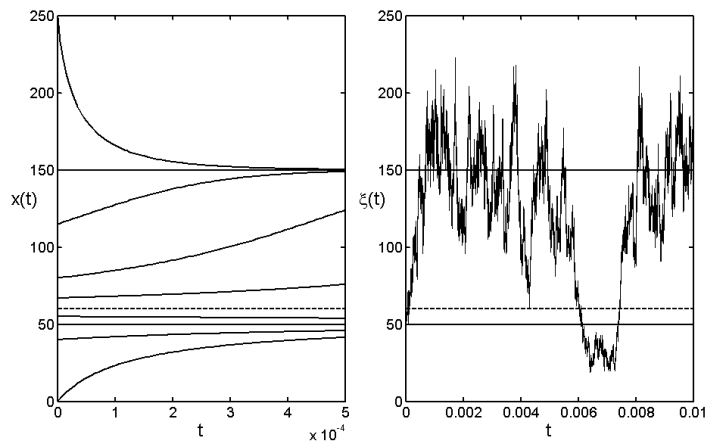


Рис. 1: Решения $x(t)$ уравнения (7) и реализация марковского процесса $\xi(t)$ при начальном условии $\xi(0) = 60$. Значения параметров $\lambda_0 = 4,5 \cdot 10^5$, $\lambda_1 = 1,95 \cdot 10^4$, $\lambda_2 = 2,6 \cdot 10^2$, $\lambda_3 = 1$

На рис. 2 показаны три решения стационарного уравнения (8) и реализация марковского процесса $\xi(t)$. При $\lambda_0 \rightarrow \infty$ уравнение (8) имеет, что нетрудно показать, единственный действительный корень x_c , являющийся точкой устойчивого равновесия. На рис. 3 показано решение уравнения (8) и реализация марковского процесса $\xi(t)$, полученные при увеличении параметра λ_0 по сравнению с рис. 2; марковский процесс $\xi(t)$ совершает колебания около значения x_c .

2.2. Гистограммы для стационарного распределения. Методом статистического моделирования получены оценки \hat{q}_j для стационарных вероятностей $q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$, $j \in N$, $\sum_{j=0}^{\infty} q_j = 1$. Величина \hat{q}_j вычисляется как отношение суммарного времени нахождения процесса в состоянии j ко всему времени построения реализации процесса.

Гистограмма стационарного распределения на рис. 2 иллюстрирует бистабильную систему. Точки максимумов гистограммы не совпадают с точками устойчивого равновесия в детерминированной модели.

Гистограмма стационарного распределения на рис. 3 получена при увеличении параметра λ_0 и показывает, что при увеличении интенсивности внешнего источника стационарное распределение близко к плотности нормального распределения. Точка максимума гистограммы не совпадает с точкой равновесия в детерминированной модели.

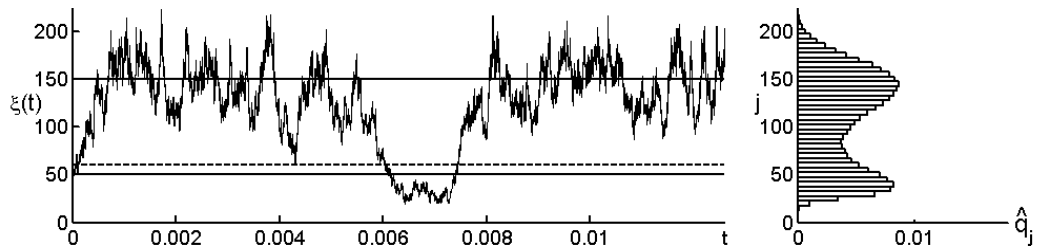


Рис. 2: Реализация марковского процесса $\xi(t)$ и гистограмма стационарного распределения при начальном условии $\xi(0) = 60$ и значениях параметров $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 2,6 \cdot 10^2$, $\lambda_1 = 1,95 \cdot 10^4$, $\lambda_0 = 4,5 \cdot 10^5$. Число скачков процесса $\xi(t)$ равно 10^7 (для гистограммы)

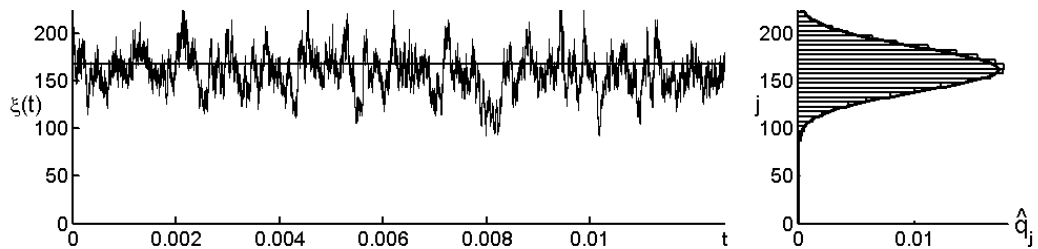


Рис. 3: Реализация марковского процесса $\xi(t)$ и гистограмма стационарного распределения при начальном условии $\xi(0) = 160$ и значениях параметров $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 2,6 \cdot 10^2$, $\lambda_1 = 1,95 \cdot 10^4$, $\lambda_0 = 6,75 \cdot 10^5$. Число скачков процесса $\xi(t)$ равно 10^7 (для гистограммы)

З а м е ч а н и е. Для построения рисунков вида рис. 1 применяют метод Рунге-Кутты приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Реализации марковских процессов, приведенные на рис. 2, 3, строятся методом Монте-Карло [9, 11]. Используется стандартный датчик равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных чисел $r =$

RNDM[0, 1]; случайная величина с показательным распределением $\mathbf{P}\{\tau \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$ определяется формулой $\tau = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r)$.

3. Квазистационарное распределение для марковского ветвящегося процесса со схемой $2\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$; $\mathbf{T} \rightarrow 0, 2\mathbf{T}$

Рассматривается однородный во времени марковский процесс рождения и гибели $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$ которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$)

$$P_{i,i-1}(t) = (\lambda_2 i(i-1) + p_0 \lambda_1 i)t + o(t), P_{ii}(t) = 1 - (\lambda_2 i(i-1) + \lambda_1 i)t + o(t), \\ P_{i,i+1}(t) = p_2 \lambda_1 i t + o(t), P_{ij}(t) = o(t), j \neq i-1, i, i+1,$$

где $p_0 \geq 0, p_2 \geq 0, p_0 + p_2 = 1$. Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей $G_j(t; z) = \sum_{i=0}^{\infty} (z^i / i!) P_{ij}(t)$ удовлетворяет первому уравнению

$$\frac{\partial G_j(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda_2 z^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \lambda_1 z \left(p_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + p_0 - \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] G_j(t; z), \quad G_j(0, z) = \frac{z^j}{j!}.$$

Производящая функция переходных вероятностей $F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j$ удовлетворяет второму уравнению ($|s| \leq 1$)

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \lambda_2 (s - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_1 (p_2 s^2 + p_0 - s) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}, \quad F_i(0; s) = s^i. \quad (9)$$

Марковский процесс находится в состоянии i случайное время $\tau_i = \min(\tau_2, \tau_1)$, τ_2, τ_1 независимые случайные величины, $\mathbf{P}\{\tau_2 \leq t\} = 1 - e^{-\lambda_2 i(i-1)t}$, $\mathbf{P}\{\tau_1 \leq t\} = 1 - e^{-\lambda_1 i t}$. Если $\min(\tau_2, \tau_1) = \tau_2$, то процесс переходит в состояние $i - 1$. Если $\min(\tau_2, \tau_1) = \tau_1$, то процесс переходит с вероятностью p_0 в состояние $i - 1$ и с вероятностью p_2 в состояние $i + 1$ (ветвящийся процесс $T \rightarrow 0, 2T$ [20]). Далее аналогичная эволюция процесса. Состояние 0 является поглощающим.

3.1. Уравнение детерминированной модели и его решение. Для рассматриваемой автокаталитической реакции с кинетической схемой $2T \rightarrow T$; $T \rightarrow 0, 2T$ [34] получим детерминированную модель, описывающую изменение количества реагента $x(t)$. Продифференцируем уравнение (9) по s и подставим $s = 1$, получаем равенство

$$\frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial t \partial s} \Big|_{s=1} = -\lambda_2 \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} \Big|_{s=1} + \lambda_1 (2p_2 - 1) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} \Big|_{s=1}.$$

Используя обозначения для среднего числа частиц $A_i(t) = (\partial F_i(t; s)/\partial s)|_{s=1}$,

$$\frac{dA_i(t)}{dt} = -\lambda_2 \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} \Big|_{s=1} + \lambda_1(p_2 - p_0)A_i(t). \quad (10)$$

Считая при $i \rightarrow \infty$ справедливым приближение «термодинамического предельного перехода»

$$\frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} \Big|_{s=1} \approx \left(\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s} \Big|_{s=1} \right)^2 = A_i^2(t),$$

приходим из (10) к уравнению детерминированной модели

$$\dot{x} = -\lambda_2 x^2 + \lambda_1(p_2 - p_0)x,$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Решение имеет вид ($p_0 \neq p_2$)

$$x(t) = \frac{\lambda_1(p_2 - p_0)x_0}{(\lambda_1(p_2 - p_0) - \lambda_2 x_0)e^{-\lambda_1(p_2 - p_0)t} + \lambda_2 x_0}. \quad (11)$$

Пусть $p_2 > p_0$. Из (11) следует, что детерминированная модель $x(t)$ выходит при $t \rightarrow \infty$ на стационарный уровень $x_c = \lambda_1(p_2 - p_0)/\lambda_2 > 0$.

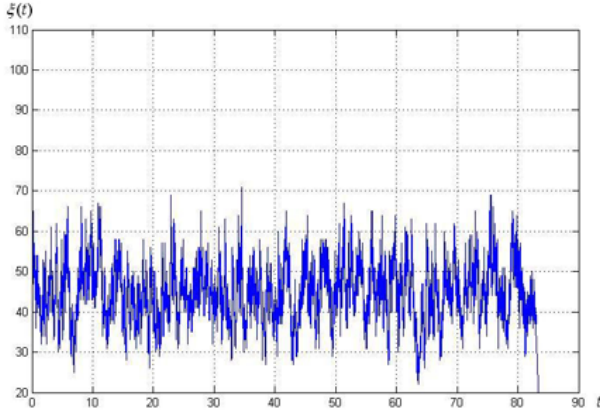


Рис. 4: Реализация марковского процесса $\xi(t)$ при начальном условии $\xi(0) = 100$ и значениях параметров $\lambda_1 = 5, 5$, $\lambda_2 = 0, 1$; $p_0 = 0, 1$, $p_2 = 0, 9$

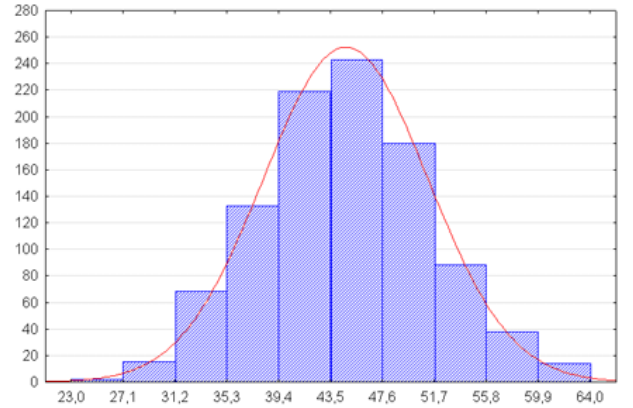


Рис. 5: Гистограмма квазистационарного распределения, построенная по 1000 реализациям процесса $\xi(t)$ на промежутке $t \in [0, 50]$

3.2. Гистограмма для квазистационарного распределения. Случайный процесс $\xi(t)$ может длительное время находится в окрестности точки x_c , но с вероятностью 1 останавливается, при любых значениях параметров, в поглощающем состоянии 0 (см. рис. 4).

В работе [34] доказано существование предельного условного распределения $q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(t) > 0, \xi(0) = i\}$, $j = 1, 2, \dots$, $\sum_{j=1}^{\infty} q_j = 1$, и сделано предположение, что квазистационарное распределение близко к

нормальному. На рис. 5 приведена полученная методом статистических испытаний гистограмма условного распределения. При больших λ_1 и $p_2 > 1/2$ гистограмма близка к плотности нормального распределения [1].

4. Спиралевидные реализации процесса рождения и гибели квадратичного типа $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \rightarrow 2\mathbf{T}_1$; $\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{0}$; $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{T}_2$

Рассматривается однородный во времени двумерный марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \dots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде ($\lambda_2 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_0 > 0$)

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 t + o(t), \quad P_{(\alpha_1-1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_1 \alpha_1 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \lambda_0 t + o(t), \quad P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = 1 - (\lambda_2 \alpha_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_0)t + o(t).$$

Вводим экспоненциальную производящую и прозводящую функции переходных вероятностей ($|s_1| \leq 1, |s_2| \leq 1$)

$$G_\beta(t; z) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t), \quad F_\alpha(t; s) = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}. \quad (12)$$

Первая система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей марковского процесса $\xi(t)$ равносильна дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda_2 z_1 z_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_1 z_1 \left(1 - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \lambda_0 \left(\frac{\partial}{\partial z_2} - 1 \right) \right] G_\beta(t; z),$$

с начальным условием $G_\beta(0; z) = \frac{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}}{\beta_1! \beta_2!}$.

Вторая система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей равносильна дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \lambda_2 (s_1^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_1 (1 - s_1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} + \lambda_0 (s_2 - 1) F_\alpha(t; s),$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.

Случайный процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ интерпретируется как модель распространения инфекции в популяции с двумя типами особей: тип T_1 — инфицированные; тип T_2 — восприимчивые. Процесс введен в [2] как модель повторяющейся эпидемии и обобщает марковский процесс эпидемии

Бартлетта—Мак-Кендрика [24, 29] допущением, что число восприимчивых особей пополняется иммиграцией.

Состояние процесса (α_1, α_2) означает наличие α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2 . Через случайное время τ_α^2 , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^2 < t\} = 1 - e^{-\lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 t}$, пара частиц типов T_1 и T_2 взаимодействует и превращается в две частицы типа T_1 — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 + 1, \alpha_2 - 1)$. Через случайное время τ_α^1 , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^1 < t\} = 1 - e^{-\lambda_1 \alpha_1 t}$, частица типа T_1 выбывает из популяции — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \alpha_2)$. Кроме того, через случайное время τ_α^0 , $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^0 < t\} = 1 - e^{-\lambda_0 t}$, частица типа T_2 появляется в популяции извне — процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2 + 1)$. Случайные величины $\tau_\alpha^2, \tau_\alpha^1, \tau_\alpha^0$ независимы, в состоянии (α_1, α_2) процесс находится случайное время $\tau_\alpha = \min\{\tau_\alpha^2, \tau_\alpha^1, \tau_\alpha^0\}$. Далее аналогичная эволюция случайного процесса. Рассматриваемый процесс является двумерным процессом рождения и гибели квадратичного типа, возможные скачки процесса показаны на рис. 6.



Рис. 6: Скачки процесса $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1$; $T_1 \rightarrow 0$; $0 \rightarrow T_2$ Рис. 7: Реализация на фазовом пространстве N^2 процесса $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1 + T_2$; $T_2 \rightarrow 2T_2$

4.1. Детерминированная модель и ее исследование. Чтобы получить детерминированную модель для кинетической схемы $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1$; $T_1 \rightarrow 0$; $0 \rightarrow T_2$, дифференцируем второе уравнение по s_1 или s_2 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial t} &= \lambda_2(2s_1 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2(s_1^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^3 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1^2 \partial s_2} - \\ &\quad - \lambda_1 \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} + \lambda_1(1 - s_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1^2} + \lambda_0(s_2 - 1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_2 \partial t} = & -\lambda_2 s_1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2 (s_1^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^3 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2^2} + \\ & + \lambda_1 (1 - s_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} - \lambda_0 F_\alpha(t; s) + \lambda_0 (s_2 - 1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

Подставляя $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, учитывая равенство $F_\alpha(t; 1) \equiv 1$, получаем, используя обозначения для среднего числа частиц типа T_i , $A_i(t) = \mathbf{M}(\xi_i(t) | \xi_1(0) = \alpha_1, \xi_2(0) = \alpha_2) = (\partial F_\alpha(t; s) / \partial s_i) |_{s=1}$, $i = 1, 2$,

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \lambda_2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s=1} - \lambda_1 A_1(t); \quad \frac{dA_2(t)}{dt} = -\lambda_2 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s=1} + \lambda_0.$$

Дифференциальные уравнения закона действующих масс соблюдаются как приближенные для средних $A_i(t)$ при большом начальном числе частиц; полагают $\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2)$, $n \rightarrow \infty$ (предельный переход соответствует принятому в статистической физике «термодинамическому предельному переходу») и

$$\frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s=1} \approx \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} \Big|_{s=1} \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} \Big|_{s=1} = A_1(t) A_2(t).$$

Приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений ($x_1(t)$ — количество частиц T_1 , $x_2(t)$ — количество частиц T_2)

$$\dot{x}_1 = \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_1 x_1; \quad \dot{x}_2 = -\lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_0, \quad (13)$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$.

Система нелинейных уравнений (13) исследуется [2, 4] методом линеаризации в окрестности точки стационарности $(x_1^c, x_2^c) = (\lambda_0/\lambda_1, \lambda_1/\lambda_2)$. Введем функции $u_1(t)$, $u_2(t)$, определяемые равенствами $x_1 = x_1^c(1 + u_1)$, $x_2 = x_2^c(1 + u_2)$; после подстановки последних выражений в (13) получаем систему уравнений

$$\dot{u}_1 = \lambda_1(u_2 + u_1 u_2); \quad \lambda_1 \dot{u}_2 = -\lambda_0 \lambda_2 (u_1 + u_2 + u_1 u_2).$$

Полагая u_1 , u_2 малыми и пренебрегая слагаемыми $u_1 u_2$, имеем

$$\dot{v}_1 = \lambda_1 v_2; \quad \lambda_1 \dot{v}_2 = -\lambda_0 \lambda_2 (v_1 + v_2).$$

Дифференцируя первое уравнение $\ddot{v}_1 = \lambda_1 \dot{v}_2$ и исключая v_2 , получаем

$$\ddot{v}_1 + \frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_1} \dot{v}_1 + \lambda_0 \lambda_2 v_1 = 0.$$

Решение линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами находится через корни характеристического многочлена $k^2 + \frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_1} k + \lambda_0 \lambda_2 = 0$; пусть $\frac{\lambda_0^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2} - \lambda_0 \lambda_2 < 0$, тогда общее решение имеет вид

$$v_1 = e^{-\frac{\lambda_0 \lambda_2}{2\lambda_1} t} \left(C_1 \cos \sqrt{\lambda_0 \lambda_2 - \frac{\lambda_0^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} t + C_2 \sin \sqrt{\lambda_0 \lambda_2 - \frac{\lambda_0^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} t \right);$$

$$v_2 = e^{-\frac{\lambda_0 \lambda_2}{2\lambda_1} t} \left(\left(-\frac{\lambda_0 \lambda_2}{2\lambda_1} C_1 + \sqrt{\lambda_0 \lambda_2 - \frac{\lambda_0^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} C_2 \right) \cos \sqrt{\lambda_0 \lambda_2 - \frac{\lambda_0^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} t - \right. \\ \left. - \left(\sqrt{\lambda_0 \lambda_2 - \frac{\lambda_0^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} C_1 + \frac{\lambda_0 \lambda_2}{2\lambda_1} C_2 \right) \sin \sqrt{\lambda_0 \lambda_2 - \frac{\lambda_0^2 \lambda_2^2}{4\lambda_1^2}} t \right),$$

где C_1, C_2 — произвольные константы. Таким образом, функции

$$x_1(t) \approx x_1^c(1 + v_1(t)); \quad x_2(t) \approx x_2^c(1 + v_2(t))$$

задают затухающие колебания — траектория на фазовой плоскости $x_1 O x_2$ есть спираль, накручивающаяся на точку стационарности (см. рис. 8).

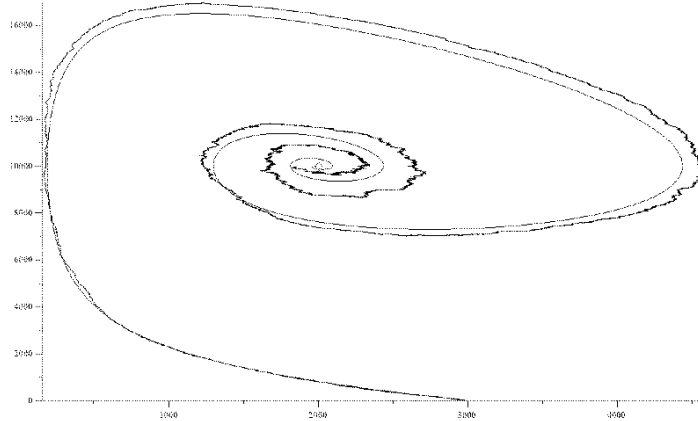


Рис. 8: Детерминированная $(x_1(t), x_2(t))$ и стохастическая $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ реализации на фазовой плоскости при начальных условиях $x_1^0 = \alpha_1 = 3000$, $x_2^0 = \alpha_2 = 0$ и значениях параметров $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-5}$, $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_0 = 10^3$

4.2. Пример реализации марковского процесса. На рис. 8 приведен полученный методом Монте-Карло пример спиралеобразной реализации марковского процесса $\xi(t)$. Случайный процесс длительное время находится в окрестности точки стационарности $(\lambda_0/\lambda_1, \lambda_1/\lambda_2)$, но с вероятностью 1 попадает, независимо от значений параметров, в поглощающее множество $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots\}$.

5. Система «паразит-носитель» $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1 + T_2$; $T_2 \rightarrow 2T_2$

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний N^2 , соответствующий схеме взаимодействий $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1 + T_2$; $T_2 \rightarrow 2T_2$. Используя производящие функции переходных вероятностей (12), первую систему уравнений для переходных вероятностей имеем в виде

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda_1 z_1 z_2 \left(\frac{\partial^3}{\partial z_1^2 \partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_2 z_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right] G_\beta(t; z),$$

с начальным условием $G_\beta(0; z) = \frac{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}}{\beta_1! \beta_2!}$; вторую систему уравнений в виде

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \lambda_1 (s_1^2 s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2 (s_2^2 - s_2) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2}, \quad (14)$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.

Кинетическая схема задает модель типа «паразит-носитель» [27], где «носитель» T_2 размножается, а «паразит» T_1 способен размножаться при наличии носителя. Фазовое пространство — множество векторов с целыми неотрицательными компонентами (α_1, α_2) , где α_1 — число частиц типа T_1 , α_2 — число частиц типа T_2 . Если случайный процесс находится в состоянии $(0, \alpha_2)$, то происходит скачок $(0, \alpha_2) \rightarrow (0, \alpha_2 + 1)$. Состояния $(\alpha_1, 0)$ — поглощающие. Из других состояний (α_1, α_2) возможны скачки $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (\alpha_1 + 1, \alpha_2)$ или $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2 + 1)$ (см. рис. 7). В состоянии (α_1, α_2) процесс находится случайное время $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \min(\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2, \tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1)$; распределения независимых случайных величин $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2, \tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1$ имеют вид $\mathbf{P}\{\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 < t\} = 1 - e^{-\lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 t}$, $\mathbf{P}\{\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1 < t\} = 1 - e^{-\lambda_2 \alpha_2 t}$.

5.1. Уравнения детерминированной модели и решение. Продифференцируем второе уравнение (14) по s_1 или s_2 , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial t \partial s_1} = & \lambda_1 (2s_1 s_2 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_1 (s_1^2 s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^3 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1^2 \partial s_2} + \\ & + \lambda_2 (s_2^2 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2}; \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial t \partial s_2} &= \lambda_1(s_1^2 - s_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_1(s_1^2 s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^3 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2^2} + \\ &+ \lambda_2(2s_2 - 1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} + \lambda_2(s_2^2 - s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_2^2}. \end{aligned}$$

Подставляя $s = 1$ и используя обозначения для среднего числа частиц типа T_i , $A_i(t) = (\partial F_\alpha(t; s) / \partial s_i) |_{s=1}$, $i = 1, 2$, получаем равенства

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \lambda_1 \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s=1}; \quad \frac{dA_2(t)}{dt} = \lambda_2 \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} \Big|_{s=1}. \quad (16)$$

Считая при $\alpha = (n\alpha_1, n\alpha_2)$, $n \rightarrow \infty$, справедливым приближение

$$\frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s=1} \approx \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} \Big|_{s=1} \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} \Big|_{s=1},$$

из (16) приходим к детерминированной модели

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 x_2; \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2,$$

начальные условия возьмем $x_1(0) = \alpha_1$, $x_2(0) = \alpha_2$; здесь $x_1(t)$, $x_2(t)$ — количества частиц T_1 , T_2 в момент времени t . Решение системы имеет вид

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 \alpha_2 (e^{\lambda_2 t} - 1) / \lambda_2}; \quad x_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (17)$$

5.2. Вычисление математических ожиданий в марковской модели. Для математического ожидания числа частиц типа T_1 ,

$$A_1(t) = \mathbf{M}(\xi_1(t) | (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (\alpha_1, \alpha_2)) = \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} \Big|_{s_1=1, s_2=1}.$$

Введем, следуя работе [27], функцию

$$H(t; s_2) = \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} \Big|_{s_1=1},$$

тогда $A_1(t) = H(t; s_2) |_{s_2=1}$. В равенство (15) подставим $s_1 = 1$, имеем

$$\frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial t \partial s_1} \Big|_{s_1=1} = s_2(\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s_1=1},$$

или используя введенную функцию,

$$\frac{\partial H(t; s_2)}{\partial t} = s_2(\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1) \frac{\partial H(t; s_2)}{\partial s_2}; \quad (18)$$

начальное условие $H(0; s_2) = \alpha_1 s_2^{\alpha_2}$.

Для решения линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (18) запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнение характеристик) [22]

$$\frac{dt}{1} = \frac{ds_2}{-s_2(\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1)} = \frac{dH}{0}$$

и найдем первые интегралы. Из равенства

$$\frac{dt}{1} = \frac{ds_2}{-s_2(\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1)}$$

после интегрирования получаем ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} \right) + C_1^*.$$

Потенцируя, положим $C_1 = e^{C_1^*}$, и тогда первый интеграл

$$\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} = C_1.$$

Второй первый интеграл получаем из равенства

$$\frac{dt}{1} = \frac{dH}{0}; \quad H = C_2,$$

и общее решение уравнения (18) имеет вид [22]

$$F \left(\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t}, H \right) = 0,$$

где F — произвольная дифференцируемая функция. Решение последнего уравнения относительно H ,

$$H(t; s_2) = f \left(\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} \right),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция.

Найдем частное решение уравнения (18), соответствующее начальному условию. При $t = 0$ получаем равенство

$$f \left(\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} \right) = \alpha_1 s_2^{\alpha_2}.$$

Положим $(\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1)/s_2 = y$, тогда $s_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)/(y - \lambda_2)$, и искомая функция

$$f(y) = \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{y - \lambda_2} \right)^{\alpha_2}.$$

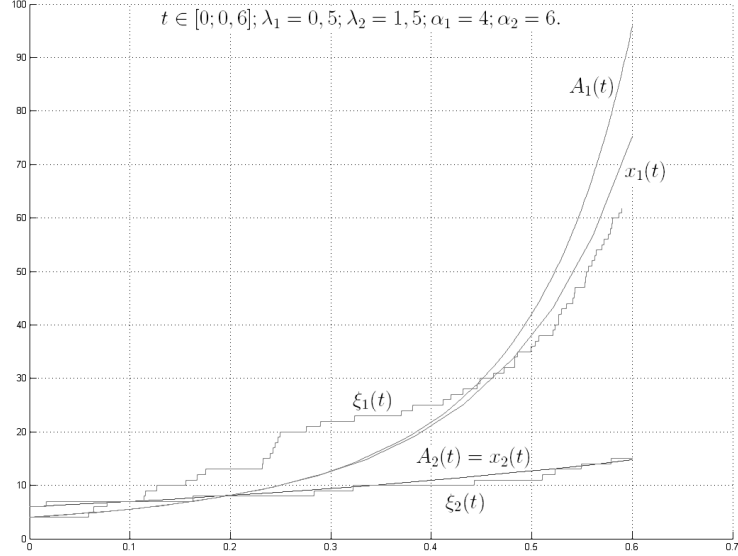


Рис. 9: Детерминированные $x_1(t)$, $x_2(t)$ и стохастические реализации $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, средние значения $A_1(t)$, $A_2(t)$, $t \in [0; 0, 6]$, при начальных условиях $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 6$ и значениях параметров $\lambda_1 = 0, 5$, $\lambda_2 = 1, 5$

Таким образом, частное решение

$$H(t; s_2) = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{\alpha_2} \left(\frac{\lambda_2 s_2 - \lambda_2 + \lambda_1}{s_2} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} - \lambda_2 \right)^{-\alpha_2}.$$

Подставив в последнюю формулу $s_2 = 1$, получаем выражение для математического ожидания ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$$A_1(t) = \alpha_1 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} - \lambda_2} \right)^{\alpha_2}. \quad (19)$$

Для нахождения $A_2(t)$ рассмотрим второе из уравнений (16),

$$\frac{dA_2(t)}{dt} = \lambda_2 A_2(t),$$

с начальным условием $A_2(0) = \alpha_2$; отсюда

$$A_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Полученные точные решения (17) и (19) показывают несовпадение $x_1(t)$ для детерминированной модели и среднего $A_1(t)$ для марковской модели. В частности, $\lim_{t \rightarrow t_{кр}} A_1(t) = \infty$, где $t_{кр} = \ln(\lambda_1/\lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_2)$, а значения $x_1(t)$ конечны при $t \in [0, \infty)$ (см. рис. 9) [18].

**6. Вероятностный аналог модели конкуренции $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2;$
 $2\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_1; 2\mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_2; \mathbf{T}_1 \rightarrow 2\mathbf{T}_1; \mathbf{T}_2 \rightarrow 2\mathbf{T}_2$**

Кинетическая схема $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; 2T_1 \rightarrow T_1; 2T_2 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 2T_1;$
 $T_2 \rightarrow 2T_2$ описывает конкуренцию между двумя видами особей за обладание ограниченным микрокосмом [31]. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2$ означает конкурентную борьбу между частицами разных типов — в результате остается частица типа T_1 или частица типа T_2 . Частицы каждого типа могут размножаться $T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$ и гибнуть в результате самолимитирования $2T_1 \rightarrow T_1; 2T_2 \rightarrow T_2$. Детерминированная модель задается системой кинетических уравнений [31] ($x_1(t), x_2(t)$ — численности популяций в момент времени t)

$$\dot{x}_1 = b_1 x_1 - \frac{b_1}{K_1} x_1^2 - \frac{b_1 \varkappa_1}{K_1} x_1 x_2; \quad \dot{x}_2 = b_2 x_2 - \frac{b_2}{K_2} x_2^2 - \frac{b_2 \varkappa_2}{K_2} x_1 x_2, \quad (20)$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$. Здесь b_1, b_2 — коэффициенты потенциальной скорости роста особей первого и второго видов; K_1, K_2 — предельные количества особей каждого вида при отсутствии конкуренции; \varkappa_1, \varkappa_2 — коэффициенты борьбы за существование.

Детерминированной модели (20) соответствует однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t), t \in [0, \infty)$, которого представимы при $t \rightarrow 0+$ в виде ($\lambda_i > 0, i = 1, \dots, 5$)

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = (p_2 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_1 (\alpha_1 - 1) \lambda_2) t + o(t), P_{(\alpha_1+1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \alpha_1 \lambda_4 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = (p_1 \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 + \alpha_2 (\alpha_2 - 1) \lambda_3) t + o(t), P_{(\alpha_1, \alpha_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \alpha_2 \lambda_5 t + o(t),$$

где $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1$ [14]. Используя двумерные производящие функции (12), записываем первое уравнение

$$\frac{\partial G_\beta(t; z)}{\partial t} = \left[\lambda_1 z_1 z_2 \left(p_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \lambda_2 z_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) + \lambda_3 z_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) + \lambda_4 z_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) + \lambda_5 z_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial}{\partial z_2} \right) \right] G_\beta(t; z),$$

с начальным условием $G_\beta(0; z) = \frac{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}}{\beta_1! \beta_2!}$, и второе уравнение ($|s| \leq 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = & \lambda_1(p_1 s_1 + p_2 s_2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2(s_1 - s_1^2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1^2} + \\ & + \lambda_3(s_2 - s_2^2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_2^2} + \lambda_4(s_1^2 - s_1) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_1} + \lambda_5(s_2^2 - s_2) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2}, \end{aligned} \quad (21)$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.

Применив к уравнению (21) изложенный ранее «термодинамический предельный переход», получаем, что параметры вероятностной модели (21) и детерминированной модели (20) связаны соотношениями $\lambda_1 p_1 = b_2 \varkappa_2 / K_2$, $\lambda_1 p_2 = b_1 \varkappa_1 / K_1$, $\lambda_2 = b_1 / K_1$, $\lambda_3 = b_2 / K_2$, $\lambda_4 = b_1$, $\lambda_5 = b_2$.

На рис. 10 штриховыми линиями на фазовой плоскости представлены решения системы уравнений детерминированной модели (20), построенные при различных начальных условиях. Приведен пример реализации марковского процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ при начальном условии $(\xi_1(0), \xi_2(0)) = (10, 10)$. Можно сделать вывод, что при выбранных значениях параметров процесс совершает случайные колебания вблизи точки равновесия детерминированной модели.

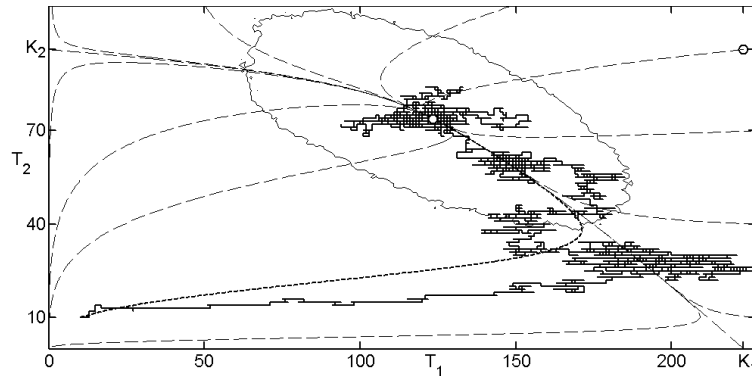


Рис. 10: Детерминированные $(x_1(t), x_2(t))$ и стохастическая $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ реализации на фазовой плоскости при значениях параметров $b_1 = 0,1645$, $b_2 = 0,0552$, $K_1 = 223$, $K_2 = 96$, $\varkappa_1 = 1,35$, $\varkappa_2 = 0,18$. Число скачков процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ равно 10^4

6.1. Двумерная гистограмма квазистационарного распределения. Процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ при $t \rightarrow \infty$ оказывается либо в классе состояний $L_1 = \{(1, 0), (2, 0), \dots\}$, либо в классе состояний $L_2 = \{(0, 1), (0, 2), \dots\}$. Вероятность попадания в один из замкнутых классов за время t обозначим $Q_{\alpha_1 \alpha_2}(t) = \sum_{\beta=1}^{\infty} (P_{(\beta, 0)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) + P_{(0, \beta)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t))$, $\alpha_1, \alpha_2 = 1, 2, \dots$ и введем

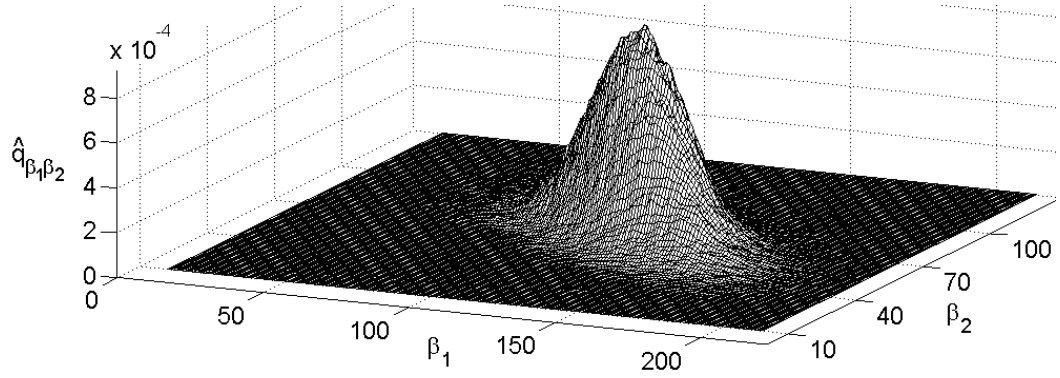


Рис. 11: Гистограмма квазистационарного распределения при значениях параметров $b_1 = 0,1645$, $b_2 = 0,0552$, $K_1 = 223$, $K_2 = 96$, $\varkappa_1 = 1,35$, $\varkappa_2 = 0,18$. Число скачков процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ равно 10^7 (для гистограммы)

квазистационарные вероятности [20]

$$q_{\beta_1 \beta_2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t)}{1 - Q_{\alpha_1 \alpha_2}(t)}, \quad \beta_1, \beta_2 = 1, 2, \dots$$

— вероятности нахождения процесса в состоянии (β_1, β_2) при $t \rightarrow \infty$ при условии, что процесс не попал в L_1, L_2 , $\sum_{\beta_1, \beta_2=1}^{\infty} q_{\beta_1 \beta_2} = 1$.

Методом статистического моделирования получены оценки квазистационарных вероятностей $\hat{q}_{\beta_1 \beta_2}$, $\beta_1, \beta_2 = 1, 2, \dots$, вычисленные как отношение суммарного времени нахождения процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ в состоянии (β_1, β_2) ко всему времени моделирования, при условии что процесс не попал в L_1, L_2 . Гистограмма квазистационарного распределения на рис. 11 близка к плотности двумерного нормального распределения. На рис. 10 показана линия уровня гистограммы.

7. Типовой расчет

Задание 1. По схеме взаимодействий выписать первое и второе уравнения для производящих функций переходных вероятностей марковского процесса. Из второго уравнения «термодинамическим предельным переходом» (при большом числе частиц) вывести систему дифференциальных уравнений детерминированной модели кинетической схемы. Найти точки стационарности системы дифференциальных уравнений и провести анализ поведения траекторий $x_1(t), \dots, x_n(t)$ детерминированной модели. Графики траекторий детерминированной модели $x_i(t)$ в зависимости от времени t даются стандартной подпрограммой метода Рунге-Кутты.

Задание 2. Определить скачки марковского процесса рождения и гибели из состояния $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, дать их графическое представление, и выписать вероятностное распределение для времени τ_α нахождения процесса в состоянии α . На этой основе в одном из программных пакетов Matlab, Maple, Mathematica составить численную модель случайного процесса $(\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$. Графики реализаций марковского процесса $\xi_i(t)$ в зависимости от времени t строятся с использованием датчика случайных чисел. Вывести совместные графики стохастических и детерминированных траекторий на всех фазовых плоскостях $x_i O x_j$, используя стандартные графические подпрограммы.

Задание 3. Определить наличие иммиграции, поглощающих состояний; при $t \rightarrow \infty$ — наличие (квази)стационарного распределения, финального распределения или возможность ухода случайного процесса на бесконечность. Проанализировать и сравнить поведение стохастической модели и детерминированной модели при $t \rightarrow \infty$. Визуальными наблюдениями за результатами численных экспериментов определить порядок начального состояния α , при котором стохастические реализации близки к детерминированным траекториям (если такая близость имеется).

Задание 4. Используя стандартные подпрограммы, построить одномерную (двумерную) гистограмму (квази)стационарного распределения или финального распределения — путем многократного повторения численного

моделирования марковского процесса (при большом промежутке времени моделирования $t \in [0, T]$). Статистическими экспериментами исследовать изменение гистограммы в зависимости от одного из параметров (один из параметров интенсивности λ_i или начальное число частиц α_i — по указанию преподавателя). Возможны значения параметров, когда гистограмма близка к плотности нормального закона, плотности показательного распределения или другому известному вероятностному распределению?

Варианты типового расчета.

1. $T_1 + T_2 \rightarrow 0, T_1, 2T_1; T_1 \rightarrow 0$, размножение нейтронов с выгоранием ядерного топлива [8].
2. $2T_1 + T_2 \rightarrow 3T_1; T_1 \rightarrow 0, 2T_2; 0 \rightarrow T_1$, брюсселятор [17, 11].
3. $T_1 + T_2 \rightarrow T_2 + T_4; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1$, каталитический реактор с финальным продуктом [23].
4. $T_1 + T_2 \rightarrow T_4; T_4 \rightarrow T_3$, короткоживущее промежуточное соединение [6].
5. $T_1 \rightarrow 2T_2; 2T_2 \rightarrow T_1$, равновесная схема [28].
6. $T_1 + T_2 \rightarrow T_3 + T_4; T_3 + T_4 \rightarrow T_1 + T_2$, двусторонняя схема [28].
7. $2T_1 \rightarrow T_2; T_2 \rightarrow 0, T_1$, два поглощающих состояния.
8. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0$, эпидемия Вейса [35, 10].
9. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0, 2T_1$, эпидемия Вейса с размножением переносчиков [27].
10. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1, T_2$, открытая эпидемия Вейса [27].
11. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0$, эпидемия Бартлетта-Мак-Кендрика [2, 24], эпидемия SIR [29].
12. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1, T_2$, общая эпидемия [25].
13. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_3, T_2 + T_3$, замкнутая эпидемия.
14. $T_1 + T_3 \rightarrow T_1; T_2 + T_3 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0$, эпидемия Беккера [27].
15. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_3; T_1 + T_3 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0$, эпидемия Гани [30].
16. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow T_3; 0 \rightarrow T_1$ [26].
17. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_3; T_3 \rightarrow T_2$, эпидемия с приобретением иммунитета [33].
18. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_2$, эпидемия SIS [29].
19. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow T_2, T_3; T_3 \rightarrow T_2$, эпидемия SIRS [29].

20. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_4; T_1 \rightarrow 0, T_2; T_2 \rightarrow 0; T_4 \rightarrow 0, T_1; 0 \rightarrow T_2$, эпидемия SEIS [29].
21. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1 + T_4; T_1 \rightarrow 0, T_3; T_2 \rightarrow 0; T_3 \rightarrow 0; T_4 \rightarrow 0, T_1; 0 \rightarrow T_2$, эпидемия SEIR [29].
22. $T_1 + T_5 \rightarrow 2T_1; T_1 + T_2 \rightarrow T_2 + T_4; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0, T_3; T_3 \rightarrow 0, T_1; T_4 \rightarrow 0, T_2; T_5 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_5$, эпидемия MSEIRS [29].
23. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 + T_3 \rightarrow T_1 + T_4; T_2 + T_4 \rightarrow T_1 + T_4; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_1, T_2$, ВИЧ-модель Н.В. Перцева.
24. $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 2T_2$, трехпараметрическая система «хищник-жертва» [6, 25].
25. $T_1 + T_2 \rightarrow 0, 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 2T_2$, четырехпараметрическая система «хищник-жертва» [31, 32].
26. $T_1 + T_2 \rightarrow 0, 2T_1; T_1 \rightarrow 0; T_2 \rightarrow 2T_2; 0 \rightarrow T_1$, система «хищник-жертва» с иммиграцией [31].
27. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1; T_2 \rightarrow 2T_2; 0 \rightarrow T_1$, измененная открытая система «хищник-жертва» [27].
28. $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$, взаимодействие двух видов [25].
29. $T_1 + T_2 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 0, 2T_1; T_2 \rightarrow 0, 2T_2; 0 \rightarrow T_1, T_2$, открытая система [26].
30. $T_1 + T_2 \rightarrow T_3; T_3 \rightarrow T_2 + T_4; 0 \rightarrow T_1$, система массового обслуживания [16, 21].

Список литературы

- [1] *Баварова Л.В., Калинин А.В.* О квазистационарном распределении марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $2T \rightarrow T$; $T \rightarrow 0, 2T$ // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. Т. 18, вып. 2 (2011). С. 245–246.
- [2] *Бартлетт М.С.* Введение в теорию случайных процессов. М.: ИЛ, 1958. — 384 с.
- [3] *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. — 512 с.
- [4] *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. — 326 с.
- [5] *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. — 448 с.
- [6] *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Наука, 1986. — 528 с.
- [7] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. — 568 с.
- [8] *Дорогов В.И., Чистяков В.П.* Вероятностные модели превращения частиц. М.: Наука, 1988. — 112 с.
- [9] *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976. — 320 с.
- [10] *Калинкин А.В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // *Успехи математических наук*. Т. 57, вып. 2 (2002). С. 23–84.
- [11] *Калинкин А.В., Ланге А.М., Мاستихин А.В., Шапошников А.А.* Численные методы Монте-Карло для моделирования схем взаимодействий при дискретных состояниях // *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана*. Серия «Естественные науки». Вып. 2(17) (2005). С. 53–74.
- [12] *Калинкин А.В.* Схемы взаимодействий: Детерминированные и стохастические модели. Методические указания к выполнению типового расчета по курсу «Дополнительные главы теории случайных процессов». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — 44 с. Архивировано: hoster.bmstu.ru/~kalinkin

- [13] *Калинкин А.В.* Типовой расчет по марковским процессам рождения и гибели квадратичного типа. В сб.: Всероссийская конференция «Прикладная теория вероятностей и теоретическая информатика»: Тезисы докладов М.: Изд-во ИПИ РАН, 2012. — С. 61–63.
- [14] *Ланге А.М., Калинкин А.В.* Вероятностный аналог модели конкуренции Г.Ф.Гаузе. В сб.: Международная конференция «Стохастические модели в биологии и предельные алгебры»: Труды конференции / Омский филиал Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН. Омск: Изд-во ОГУ, 2010. С. 40–43.
- [15] *Леонтович М.А.* Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. Т. 5, Вып. 3–4 (1935). С. 211–231.
- [16] *Лисицина М.В.* Система массового обслуживания с подвижными приборами // Студенческий научный вестник. Сборник тезисов докладов студенческой научно-технической конференции. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. Т. 3. С. 129–130.
- [17] *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. — 512 с.
- [18] *Первухин А.А.* Сравнение стохастических и детерминированных моделей для схем взаимодействий частиц. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — 100 с.
- [19] *Румер Ю.Б., Рывкин М.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977. — 552 с.
- [20] *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. — 436 с.
- [21] *Сергеев А.А.* Предельные теоремы для случайных процессов, характеризующих работу системы массового обслуживания с подвижными приборами // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 12, вып. 3 (2005). С. 680.
- [22] *Филлипов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 176 с.
- [23] *Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г.* Курс химической кинетики. М.: Высшая школа, 1974. — 400 с.

- [24] Эпидемии процесс. Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия. 1985. — Кол. 1008.
- [25] *Anderson W.J.* Continuous-time markov chains: an application-oriented approach. New York: Springer, 1991. — 340 p.
- [26] *Becker N.G.* A stochastic model for two interacting populations // J. Appl. Prob. V. 7, no. 3 (1970). P. 544–564.
- [27] *Becker N.G.* Interactions between species: some comparisons between deterministic and stochastic models // Rocky Mountain J. Math. V. 4, no. 1 (1973). P. 53–68.
- [28] *Dadvey I.G., Ninham B.W., Staff P.J.* Stochastic models for second-order chemical reaction kinetics. The equilibrium state // J. Chem. Phys. V. 45 (1966). P. 2145–2155.
- [29] Epidemic model. https://en.wikipedia.org/wiki/Epidemic_model
- [30] *Gani J.* Approaches to the modelling of AIDS // Lecture notes in biomathematics. V. 86. Stochastic processes in epidemic theory. Heidelberg: Springer. 1990. P. 145–154.
- [31] *Gause G.F.* The Struggle for Existense. Baltimore: Williams and Wilkins, 1934. — 163 p. Перепечатано: Гаузе Г.Ф. Борьба за существование. Ижевск: ИКИ, 2002. — 160 с.
- [32] *Hitchcock S.E.* Extinction probabilities in predator-prey models // J. Appl. Prob. V. 23, no. 1 (1986). P. 1–13.
- [33] *Kendall D.G.* Deterministic and stochastic epidemics in closed populations // Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1956. V. 4. P. 149–165.
- [34] *Sirl D.* Limiting conditional distributions for a class of autocatalytic chemical reactions // Centre of Excellence for Mathematics and Statistics of Complex Systems. Brisbane: University of Queensland Press, 2004. — 8 p.
- [35] *Weiss G.* On the spread of epidemics by carries // Biometrics. V. 21, no. 2 (1965). P. 481–490.

Содержание

| | |
|---|-----------|
| 1. Кинетические схемы и дискретные марковские модели | 3 |
| 1.1. Детерминированный и стохастический подходы при моделировании схем взаимодействий | 3 |
| 1.2. Марковские процессы с дискретными состояниями. Уравнения Колмогорова | 5 |
| 1.3. Марковская модель кинетической схемы. Первое и второе уравнения в производящих функциях | 6 |
| 2. Двухвершинное стационарное распределение в бистабильной системе $3T \rightarrow 2T; 2T \rightarrow 3T; T \rightarrow 0; 0 \rightarrow T$ | 9 |
| 2.1. Детерминированная модель и ее исследование | 10 |
| 2.2. Гистограммы для стационарного распределения | 11 |
| 3. Квазистационарное распределение для марковского ветвящегося процесса со схемой $2T \rightarrow T; T \rightarrow 0, 2T$ | 13 |
| 3.1. Уравнение детерминированной модели и его решение | 13 |
| 3.2. Гистограмма для квазистационарного распределения | 14 |
| 4. Спиралевидные реализации процесса рождения и гибели квадратичного типа $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1; T_1 \rightarrow 0; 0 \rightarrow T_2$ | 15 |
| 4.1. Детерминированная модель и ее исследование | 16 |
| 4.2. Пример реализации марковского процесса | 18 |
| 5. Система «паразит-носитель» $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_1 + T_2; T_2 \rightarrow 2T_2$ | 19 |
| 5.1. Уравнения детерминированной модели и решение | 19 |
| 5.2. Вычисление математических ожиданий в марковской модели | 20 |
| 6. Вероятностный аналог модели конкуренции $T_1 + T_2 \rightarrow T_1, T_2; 2T_1 \rightarrow T_1; 2T_2 \rightarrow T_2; T_1 \rightarrow 2T_1; T_2 \rightarrow 2T_2$ | 23 |
| 6.1. Двумерная гистограмма квазистационарного распределения | 24 |
| 7. Приложение. Типовой расчет | 26 |
| Список литературы | 29 |

