

Подготовка к рубежному контролю №2  
по курсу «Дискретная математика»  
для специальности РТ5, 4-й семестр, 2023 г.

Теоретические вопросы  
(8 баллов)

1. Дайте определения бинарной и  $n$ -арной операций на множестве. В каком случае бинарная операция называется ассоциативной, коммутативной, идемпотентной?
2. Дайте определения правого и левого нейтрального элемента относительно бинарной операции. Сформулируйте и докажите утверждение о совпадении правого и левого нейтральных элементов и их единственности.
3. Дайте определения элемента, правого и левого обратного к заданному элементу относительно бинарной операции. Сформулируйте и докажите утверждение о совпадении правого и левого обратных элементов и их единственности.
4. Дайте определения группоида, полугруппы, моноида, группы и абелевой группы.
5. Сформулируйте и докажите свойства группы.
6. Дайте определения группы подстановок, цикла длины  $k$  и транспозиции.
7. Дайте определения степени элемента группы, порядка элемента группы и циклической группы. Сформулируйте и докажите теорему о порядке циклической группы.
8. Дайте определения кольца, коммутативного кольца, мультипликативной группы кольца, тела и поля.
9. Дайте определение кольца вычетов по модулю  $k$  и напишите таблицы операций сложения и умножения для  $k = 4$ .
10. Сформулируйте и докажите свойства кольца.
11. Дайте определение делителей нуля и приведите пример делителей нуля в некотором кольце.
12. Дайте определение области целостности. Сформулируйте и докажите теорему о том, когда область целостности является полем.
13. Дайте определения полукольца, коммутативного полукольца и идемпотентного полукольца, а также естественного порядка идемпотентного полукольца.
14. Сформулируйте и докажите теорему о сумме элементов идемпотентного полукольца.
15. Дайте определение замкнутого полукольца. Сформулируйте и докажите теорему о замкнутости конечного идемпотентного полукольца.
16. Дайте определение итерации элемента в замкнутом полукольце. Сформулируйте и докажите теорему о решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.

17. Дайте определения неориентированного графа, степени его вершины, цепи, простой цепи и цикла. Сформулируйте и докажите теорему о существовании простой цепи.
18. Дайте определения ориентированного графа, степени его вершины, полустепени захода и исхода вершины, пути, простого пути и контура.
19. Дайте определения матрицы инциденций, матрицы смежности вершин и матрицы достижимости для неориентированного и ориентированного графа.
20. Дайте определения взвешенного ориентированного графа, матрицы меток дуг, метки пути и стоимости прохождения из одной вершины в другую.
21. Сформулируйте и докажите лемму о свойствах  $k$ -й степени матрицы меток дуг. Сформулируйте и докажите теорему о связи матрицы меток дуг и матрицы стоимостей взвешенного ориентированного графа.
22. Дайте определения подграфа, остовного подграфа, связного графа и компоненты связности.
23. Дайте определения неориентированного дерева, неориентированного леса и остовного леса. Сформулируйте и докажите теорему о существовании максимального остовного леса.
24. Дайте определения связного орграфа (ориентированного графа), сильно связного орграфа, слабо связного орграфа, компоненты связности, бикомпоненты и слабой компоненты.
25. Дайте определения ориентированного дерева, ориентированного леса, высоты ориентированного дерева, а также глубины, высоты и уровня для вершины ориентированного дерева.
26. Дайте определения бинарного ориентированного дерева и полного бинарного ориентированного дерева. Сформулируйте и докажите теорему о высоте бинарного ориентированного дерева.
27. Сформулируйте задачу сортировки  $n$ -элементного множества. Получите формулу для оценки трудоёмкости задачи сортировки.
28. Опишите разницу между такими структурами данных, как стек и очередь, а также между алгоритмами обхода вершин графа в глубину и в ширину.
29. Опишите классификацию рёбер неориентированного графа и дуг ориентированного графа при поиске глубинного остовного леса. Приведите алгоритм распознавания класса дуги ориентированного графа по  $D$ -номерам и текущему состоянию стека.
30. Дайте определения алфавита, слова в алфавите, языка в алфавите, а также операций объединения, соединения и итерации языков.
31. Дайте определения порождающей грамматики, правила вывода, выводимости слова  $u$  из слова  $x$  в данной грамматике и языка, порождаемого грамматикой.
32. Дайте определения регулярной грамматики и регулярного языка. Приведите пример регулярной и нерегулярной грамматики.

33. Дайте определение полукольца  $\mathcal{R}(V)$ , конечного автомата, его функции переходов и языка конечного автомата.
34. Дайте определения полностью определённого, детерминированного и квазидетерминированного конечного автомата.
35. Опишите, как по конечному автомату построить эквивалентную ему регулярную грамматику и как по регулярной грамматике построить эквивалентный ей конечный автомат.
36. Сформулируйте и докажите теорему Клини.
37. Опишите задачу анализа конечного автомата и алгоритм её решения.
38. Дайте определение эквивалентных конечных автоматов. Сформулируйте теорему о детерминизации конечного автомата и опишите алгоритм построения детерминированного конечного автомата, эквивалентного заданному.
39. Сформулируйте и докажите теорему о дополнении регулярного языка. Сформулируйте и докажите следствие из этой теоремы (о пересечении, разности и симметрической разности регулярных языков).

### Задачи для подготовки

#### 1. Бинарные операции, группы, кольца и поля (7 баллов)

- 1.1. На множестве  $M$  определена операция  $\circ$  по правилу  $x \circ y = x$ . Установите, является ли алгебра  $(M, \circ)$  полугруппой, моноидом, группой или абелевой группой.
- 1.2. Пусть на множестве  $M^2$ , где  $M$  – некоторое множество, определена бинарная операция  $\circ$  по правилу  $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$ . Установите, является ли алгебра  $(M^2, \circ)$  полугруппой, моноидом, группой или абелевой группой.
- 1.3. На множестве всех целых чисел  $\mathbb{Z}$  определена операция  $\circ$  по правилу  $a \circ b = a + b + ab$ . Установите, является ли алгебра  $(\mathbb{Z}, \circ)$  полугруппой, моноидом, группой или абелевой группой.
- 1.4. Установите, является ли алгебра  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \circ)$ , где  $x \circ y = 3xy$ , группой, и если да, то решите в этой группе уравнение  $2 \circ x = 5$ .
- 1.5. В группе подстановок  $S_4$  решите уравнение
 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
- 1.6. В группе подстановок  $S_7$  решите уравнение
 
$$(1\ 3\ 6) \circ (5\ 6) \circ X \circ (1\ 4\ 2\ 7) = (1\ 3\ 5).$$
- 1.7. Является ли множество всех матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ , где  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , вместе с операциями сложения и умножения матриц кольцом, телом или полем? Есть ли здесь делители нуля?
- 1.8. В мультипликативной группе вычетов  $\mathbb{Z}_7^*$  решите уравнение  $3^{2011} \otimes x = 2$ .

1.9. Решите систему уравнений: а) в поле  $\mathbb{Z}_2$ ; б) в поле  $\mathbb{Z}_3$ .

$$\begin{cases} x + y = 1; \\ x - y = 1. \end{cases}$$

1.10. Решите систему уравнений: а) в кольце  $\mathbb{Z}_5$ ; б) в кольце  $\mathbb{Z}_6$ .

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 4; \\ x - 4y - 3z = 3. \end{cases}$$

## 2. Задача о путях во взвешенных орграфах (7 баллов)

2.1. Решив систему уравнений в полукольце  $\mathcal{B}$ , найдите матрицу достижимости ориентированного графа. Матрица  $A$  смежности вершин графа задана таблицей. При нахождении решения следует пользоваться только формулой для решения линейного уравнения в замкнутом полукольце и методом исключения переменных.

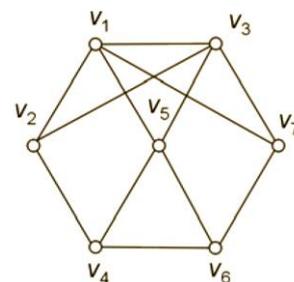
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0

2.2. Решив систему уравнений в полукольце  $\mathcal{R}^+$ , найдите матрицу стоимостей ориентированного графа. Матрица меток дуг графа задана таблицей. При нахождении решения следует пользоваться только формулой для решения линейного уравнения в замкнутом полукольце и методом исключения переменных.

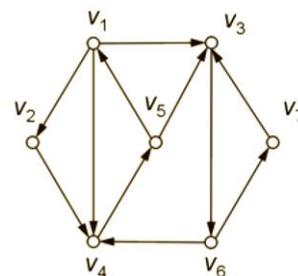
$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	6
$\infty$	5	$\infty$	$\infty$	2
2	$\infty$	$\infty$	6	4
$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	3
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1

## 3. Методы систематического обхода вершин графа (7 баллов)

3.1. Задайте граф с помощью массива лидеров и списков смежности, располагая вершины в порядке возрастания их номеров. Выполните обход всех вершин графа в глубину и в ширину, начиная из вершины  $V_1$ . Укажите  $D$ -номера вершин, полученные в процессе обхода. При обходе в глубину постройте глубинное остовное дерево. При обходе в ширину укажите кратчайшие пути из стартовой вершины во все остальные.



3.2. Задайте орграф с помощью массива лидеров и списков смежности, располагая вершины в порядке возрастания их номеров. Выполните обход всех вершин орграфа в глубину и в ширину, начиная из вершины  $V_5$ . Укажите  $D$ -номера вершин, полученные в процессе обхода. При обходе в глубину постройте глубинное остовное дерево. При обходе в ширину укажите кратчайшие пути из стартовой вершины во все остальные.



#### 4. Регулярные языки и конечные автоматы (7 баллов)

- 4.1. Решив систему уравнений в полукольце регулярных языков, найдите язык, допускаемый конечным автоматом  $M = \{\{a, b\}, \{q_1, q_2, q_3\}, q_1, \{q_3\}, \delta(q_1, a) = \{q_3\}, \delta(q_2, a) = \{q_1\}, \delta(q_2, b) = \{q_3\}, \delta(q_3, a) = \{q_2\}\}$ .
- 4.2. По регулярному выражению  $(ab + b)^*b$  постройте конечный автомат, опираясь на доказательство теоремы Клини. Удалите из полученного конечного автомата  $\lambda$ -переходы и детерминизируйте его.
- 4.3. Детерминизируйте конечный автомат  $M = \{\{0, 1\}, \{q_1, q_2, q_3\}, q_1, \{q_3\}, \delta(q_1, 0) = \{q_1, q_3\}, \delta(q_1, 1) = \{q_2, q_3\}, \delta(q_2, 1) = \{q_1\}, \delta(q_3, 0) = \{q_2\}\}$ . Установите, допускает ли конечный автомат цепочку 00110.
- 4.4. Постройте конечный автомат в алфавите  $\{0, 1\}$ , который допускает множество всех цепочек, не заканчивающихся подцепочкой 00.
- 4.5. Найдите регулярное выражение для дополнения языка  $L = (ab + b)^*b$ . (Указание: построить конечный автомат для языка  $L$ , детерминизировать, построить конечный автомат для дополнения языка  $L$ , найти язык построенного автомата).

	Теория				Задачи				
№	1	2	3	min	4	5	6	7	min
Баллы	8	8	8	<b>12</b>	7	7	7	7	<b>18</b>

## Билет 0

### Теория

1. Дайте определения бинарной и  $n$ -арной операций на множестве. В каком случае бинарная операция называется ассоциативной, коммутативной, идемпотентной?
2. Дайте определения неориентированного дерева, неориентированного леса и остовного леса. Сформулируйте и докажите теорему о существовании максимального остовного леса.
3. Опишите задачу анализа конечного автомата и алгоритм её решения.

### Задачи

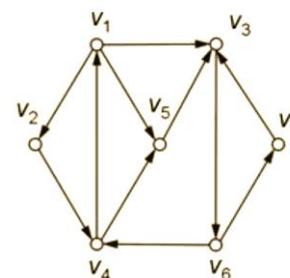
4. В группе подстановок  $S_7$  решите уравнение

$$(1\ 3\ 6) \circ (5\ 6) \circ X \circ (1\ 4\ 2\ 7) = (1\ 3\ 5).$$

5. Решив систему уравнений в полукольце  $\mathcal{R}^+$ , найдите матрицу стоимостей ориентированного графа. Матрица меток дуг графа задана таблицей. При нахождении решения следует пользоваться только формулой для решения линейного уравнения в замкнутом полукольце и методом исключения переменных.

$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	6
$\infty$	5	$\infty$	$\infty$	2
2	$\infty$	$\infty$	6	4
$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	3
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1

6. Задайте орграф с помощью массива лидеров и списков смежности, располагая вершины в порядке возрастания их номеров. Выполните обход всех вершин орграфа в глубину и в ширину, начиная из вершины  $V_5$ . Укажите  $D$ -номера вершин, полученные в процессе обхода. При обходе в глубину постройте глубинное остовное дерево. При обходе в ширину укажите кратчайшие пути из стартовой вершины во все остальные.



7. Постройте конечный автомат в алфавите  $\{0, 1\}$ , который допускает множество всех цепочек, не заканчивающихся подцепочкой 00.