Типовые варианты задач к Рубежному контролю по линейной алгебре (практика)

1. Проверить, что векторы $\boldsymbol{e}_1 = (-1;\ 2;\ 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1;\ 0;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0;\ 1;\ 2)$ образуют базис в $\mathbf{R}^3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в этом базисе, если его координаты в исходном базисе $\boldsymbol{b} = (-1;\ 7;\ 7)$.

2. Привести матрицу $\boldsymbol{A}$ линейного оператора к диагональному виду. Записать матрицу перехода.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке векторов $\boldsymbol{g}_1 = (1;\ 0;\ 2;\ 2)$, $\boldsymbol{g}_2 = (-2;\ 1;\ 0;\ 1)$, $\boldsymbol{g}_3 = (-3;\ 2;\ -4;\ -2)$.

4. В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Оператор $\boldsymbol{A}$ переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (5x_1 - x_3, -2x_1 - 3x_2 + 4x_3, 2x_1 - x_2 + x_3)$. Доказать линейность оператора $\boldsymbol{A}$ и найти его матрицу в этом базисе.

5. Оператор $\boldsymbol{A}$ в пространстве $\boldsymbol{V}$ задан соотношением $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} = (1;\ 3;\ 4)$, $\boldsymbol{b} = (7;\ -1;\ 1)$. Доказать линейность оператора $\boldsymbol{A}$ и найти его матрицу в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

6. В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ евклидова пространства векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют координаты $\boldsymbol{a}(-1;\ 3)$, $\boldsymbol{b}(1;\ -1)$. Найти $\|\boldsymbol{a}\|$ и скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $\|\boldsymbol{e}_1\| = 1$, $\|\boldsymbol{e}_2\| = 2$, а $\|\boldsymbol{b}\| = 3$.

7. В евклидовом пространстве функций, непрерывных на отрезке [–1; 1] со скалярным произведением $(f, g) = \int_2^4 f(x)g(x)dx$ найти косинус угла между $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и $g(x) = x^2$.

8. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы в зависимости от значения параметра λ:

$$f(x, y) = (\lambda - 1)x^2 + (2\lambda + 6)xy + 2\lambda.$$

9. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

10. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

11. Построить кривую:

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 = 144.$$